Risikobeschränkung in der Portfoliooptimierung

Leo Schubert[1], HTWG Konstanz

Abstract

The management of equity funds tries to find an efficient selection of stocks. After these have been determined by optimization procedures, they often have to be adjusted for economic or legal reasons with the consequence that the solutions are no longer efficient. In the case of a publicly offered equity fund, a legal reason can be Article 52(2) of the Directive 2009/65/EC of the European Parliament and of the Council of 13 July 2009 or the KAGB § 206. A part of the directive states e.g. that never more than 10% of the budget can be invested in one share. These rules in total are also known as the 5-10-40 condition. In order to integrate such risk constraints in portfolio optimization, two optimization models have been developed - a quadratic and a linear one. The models were tested using historical return data from the HDAX. The linear model shows that the specifications of the EU Directive achieve the targeted volatility reduction. However, this risk constraint has a price, which can be expressed in terms of the currencies "return loss" or "volatility gain". For the same volatility, the portfolio not constrained by the 5-10-40 condition achieved an annual return that was approximately 10% higher. The "volatility gain" is small around the minimum volatility point (MVP), but can be as high as 25% when portfolios determined under the 5-10-40 condition are compared to unconstrained optimized portfolios at the same return in each case. The quadratic model is based on the approach of H. Markowitz and shows a more flexible way of risk limitation that leads to comparable results.

Keywords: portfolio optimization, portfolio management, 5-10-40 constraint, stochastic programming, quadratic portfolio optimization, linear portfolio optimization, branch&bound, funds, EC Directive 2009/65/EC Article 52(2), Kapitalanlagegesetzbuch (KAGB) § 206.

JEL Classification: G11, G28, K22, E58, C60, C61, C44.

Kurzzusammenfassung

Das Management von Aktienfonds strebt effiziente Mischungen von Aktien an. Nachdem diese durch Optimierungsverfahren ermittelt wurden, müssen sie aus ökonomischen oder rechtlichen Gründen oft angepasst werden mit der Konsequenz, dass die Lösungen nicht mehr effizient sind. Ein rechtlicher Grund kann bei einem öffentlich angebotenen Aktienfond der Artikel 52(2) der EU-Richtlinie 2009/65/EC bzw. das KAGB § 206 sein. Ein Teil der Richtlinie besagt z.B., dass in eine Aktie nie mehr als 10% des Budgets investiert werden kann. Diese Regeln insgesamt sich auch als 5-10-40-Bedingung bekannt. Um derartige Risikobeschränkungen in der Portfoliooptimierung zu integrieren wurden zwei Optimierungsmodelle entwickelt – ein quadratisches und ein lineares. Die Modelle wurden anhand von historischen Renditedaten des HDAX getestet. Das lineare Modell zeigt, dass die Vorgaben der EU-Richtlinie die angestrebte Volatilitätsreduktion erreicht. Diese Risikobeschränkung hat aber einen Preis, der in den Währungen „Renditeverlust“ bzw. „Volatilitätszuwachs“ ausgedrückt werden kann. Bei gleicher Volatilität erzielte das nicht durch die 5-10-40-Bedingung eingeschränkte Portfolio eine ca. 10% höhere Jahresrendite. Der „Volatilitätszuwachs“ ist im Umfeld des minimalen Volatilitätspunktes (MVP) gering, kann aber bis zu 25% betragen, wenn Portfolios die unter der 5-10-40-Bedingung ermittelt wurden verglichen werden mit uneingeschränkt optimierten Portfolios bei jeweils gleicher Rendite. Das quadratische Modell baut auf dem Ansatz von H. Markowitz auf und zeigt einen flexibleren Weg der Risikobegrenzung der zu vergleichbaren Resultaten führt.

Schlüsselwörter: Portfolio Optimierung, Portfolio Management, 5-10-40-Bedingung, Stochastische Programmierung, Quadratische Portfoliooptimierung, Lineare Portfoliooptimierung, Branch&Bound, Funds, EG-Richtlinie 2009/65/EC Artikel 52(2), Kapitalanlagegesetzbuch (KAGB) § 206.

JEL Klassifikation: G11, G28, K22, E58, C60, C61, C44.

---

[1] Leo.Schubert@HTWG-Konstanz.de

1. Einleitung

Den Grundstein für die moderne Kapitalmarkttheorie legten vor einigen Jahrzehnten H. Markowitz (1952)[2] und W. F. Sharp (1964)[3]. Ihre beiden Optimierungsansätze sind heute Standard im Portfoliomanagement. Die dabei ermittelten effizienten Portfolios müssen jedoch häufig an zusätzliche Bedingungen angepasst werden und verlieren dadurch ihre effiziente Eigenschaft. Diese Restriktionen können z.B. das Ziel haben, den Verwaltungsaufwand zu reduzieren oder aber eine rechtliche Forderung darstellen. So wird beispielsweise mit der Richtlinie von 2009/65/EC des Europäischen Parlaments und Rates vom 13 Juli 2009 im Artikel 52(2) die so genannte 5-10-40-Regel gefordert und z.B. in Deutschland im Kapitalanlagegesetzbuch (KAGB) mit dem § 206 juristisch verankert. Die Europäische Union reagierte damit auf den Trend bzw. die Notwendigkeit, dass heute zunehmend mehr Menschen in Fonds investieren um z.B. ihre Rente zu finanzieren. Die 5-10-40-Regel soll dabei den Verlust von Kapital reduzieren, indem diese vorschreibt, dass öffentlich angebotene Aktienfonds[4] maximal 5 % des Budgets in eine Aktie investieren sollen. Diese Grenze kann bis auf 10% erhöht werden, falls die über 5 % liegenden Titel zusammen maximal 40% des investierten Kapitals beanspruchen. Dadurch soll der private Investor vor zu starken Schwankungen seines Aktienkapitals bewahrt werden die i.d.R. bei Portfolios mit wenigen Aktientiteln auftreten bzw. wenn das Kapital schwerpunktmäßig in wenige Titel investiert wurde.

Im Folgenden wird eine quantitativ gestützte Betrachtung der Auswirkung von indirekten Volatilitätsbeschränkungen diskutiert. Bei indirekten Beschränkungen ist der Ansatzpunkt der Beschränkung die Gewichtung der einzelnen Aktien im Portfolio, die durch die Variablen x_i ($i = 1, ..., n$) repräsentiert werden. Dabei steht die Portfoliobildung im Vordergrund und keine temporäre Absicherung oder Immunisierung des Portfolios, mit z.B. short Futures oder inversen Exchange Traded Funds (ETFs)[5].

Der erste Ansatz baut auf dem quadratischen Modell von H. Markowitz auf und beschränkt die Summe der x_i^2. Das Risikomaß ist dabei die Varianz bzw. Standardabweichung der Renditen. Die 5-10-40-Regel wird im zweiten Modell umgesetzt und verwendet dabei die lineare Portfoliooptimierung die von H. Konno und H. Yamazaki[6] vorgeschlagen wurde. Bei dem linearen Modell wird das Risiko durch die durchschnittliche (absolute) Abweichung gemessen.

Bei beiden Modellen steht die Frage im Mittelpunkt, wie sich durch Risikolimitierungen (wie z.B. die 5-10-40-Regel bei dem linearen Ansatz oder eine Beschränkung über einen Parameter beim quadratischen Ansatz) die Rendite reduziert bzw. die Volatilität (d.h. das Risiko) erhöht im Vergleich zu den unbeschränkten effizienten Portfolios.

Durch die Integration dieser Beschränkung der Volatilität in ein Optimierungsmodell werden effiziente Portfolios ermittelt, die nicht durch eine nachträgliche Anpassung der Aktiengewichtungen wieder ineffizient werden.

---

[2] Vgl. Markowitz, H., (1952).

[3] Vgl. Sharp, W. F., (1964).

[4] Die Richtlinie 2009/65/EC bzw. das KAGB bezieht sich auf „Organismen für gemeinsame Anlagen in Wertpapiere" (OGAW) bzw. „undertakings for collective investment in transferable securities" (UCITS).

[5] Vgl. Schubert, L., (2011).

[6] Vgl. Konno, H., Yamazaki, H., (1991) bzw. Feinstein, C. D., Thapa, M. N., (1993).

2. Quadratischer Ansatz zur Risikoreduktion

2.1 Modell zum quadratischen Ansatz

Die klassische Portfolioselektion verwendet die Varianz als Risikomaß. In der Zielfunktion (2-1) wird deshalb die Kovarianz cov_{ij} der Renditen der Aktie i mit denen der Aktie j verwendet um die Varianz des Portfolios zu minimieren:

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{cov}_{ij} \cdot x_j \rightarrow \min . \tag{2-1}$$

Als Nebenbedingung muss die Budgetrestriktion

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \tag{2-2}$$

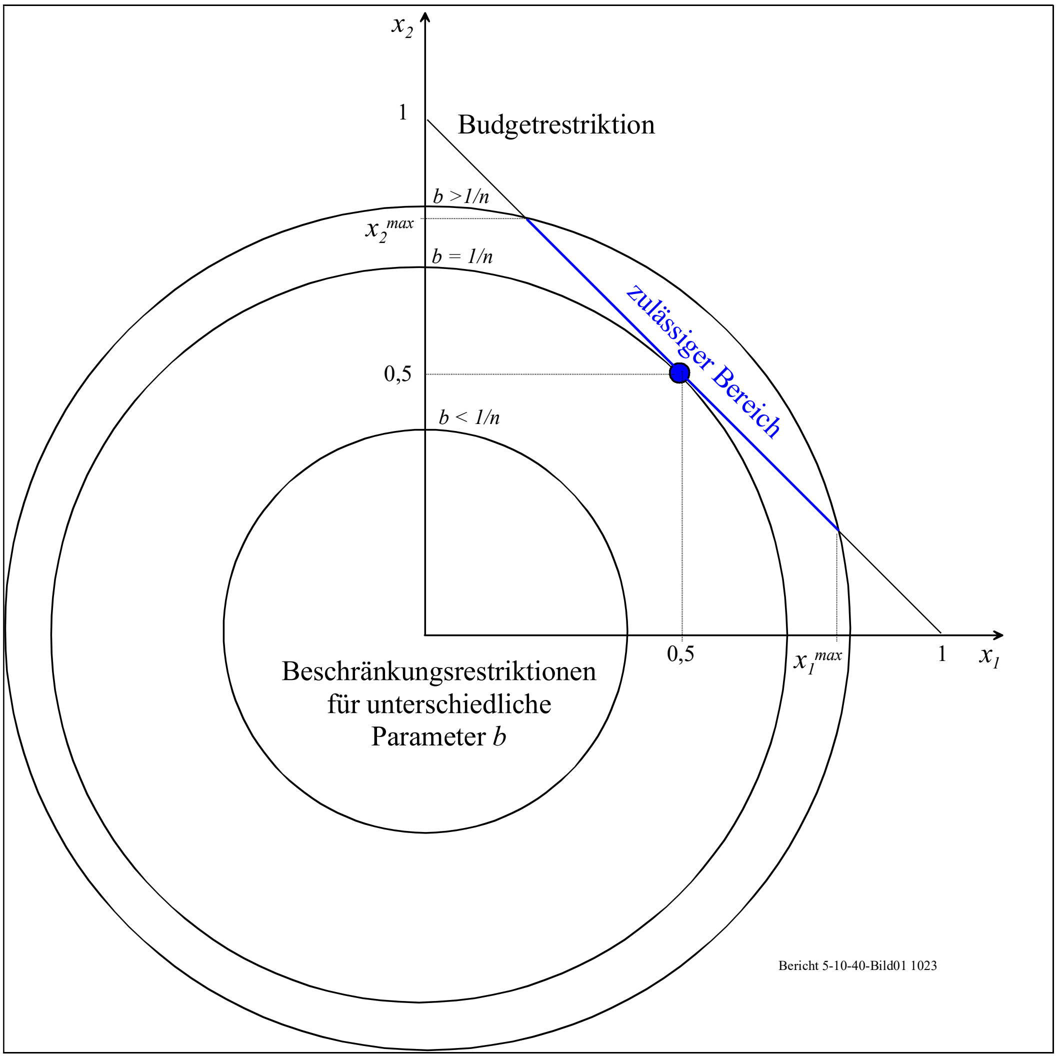

Abb. 2-1: Zulässiger Bereich der Variable x bei unterschiedlichen Beschränkungsparametern b

und die Mindestrendite-Ungleichung

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot x_i \geq r_P \qquad (2\text{-}3)$$

beachtet werden. Dabei stellt die Variable r_i die mittlere Rendite der Aktie $i = 1, \ldots, n$ dar und r_p die angestrebte Mindestrendite. Die Variable $x_i \geq 0$ ist der Anteil des Budgets, der in Aktie i investiert wird.

Dieses Modell von H. Markowitz kann um folgende Restriktion erweitert werden, um indirekt die Volatilität der Portfolios zu beschränken:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq b\,. \qquad (2\text{-}4)$$

Wenn alle x_i ($i = 1, \ldots, n$) in (2-4) den gleichen Wert besitzen, so wird $f(x)$ minimal. Mit der Budgetrestriktion (2-3) ergeben sich die Grenzen für den Beschränkungsparameter:

$$\frac{1}{n} \leq b \leq 1. \qquad (2\text{-}5)$$

Die Abbildung 2-1 zeigt die Budgetrestriktion (2-2) und die Beschränkungsfunktion (2-4) zu n = 2. Für $b = 1/n$ besitzt der zulässige Bereich nur noch eine Lösung und für $b \geq 1$ ist die Beschränkungsfunktion nicht mehr aktiv. In letzterem Fall werden Ergebnisse wie im unbeschränkten klassischen Ansatz ermittelt.

Die Ungleichung (2-4) reduziert zwar die Volatilität (vgl. auch den empirischen Test in Abb. 2-2), garantiert jedoch für eine Aktie i nicht, dass das Gewichte x_i klein ausfällt. Die maximale Größe von x_i hängt von b und n ab[7]:

$$\boxed{x_i^{\max} = \frac{1 + \sqrt{b \cdot (n^2 - n) - (n-1)}}{n}}. \qquad (2\text{-}6)$$

2.1 Empirischer Test des quadratischen Ansatzes

Der empirische Test des Modells wird anhand der historischen Daten des HDAX durchgeführt[8]. Im diesem Index sind die 100 größten Aktien am deutschen Kapitalmarkt enthalten. Die Daten bestehen aus T = 245 Tagesrenditen je Aktie. Die damals enthaltenen Aktien im HDAX sind in der Anlage A2 aufgelistet.

Entsprechend dem Umfang des HDAX ist bei der empirischen Anwendung der Parameter n = 100. In der Tabelle 2-1 wird deshalb zu n = 2 (vgl. auch Abbildung 2-1) auch n = 100 berücksichtigt und 8 Beschränkungsparameter b die gemäß Ungleichung (2-5) beschränkt sind.

b	**0,005**	**0,01**	**0,02**	**0,05**	**0,10**	**0,5**	**0,7**	**1,0**
***n* = 2**						0,5000	0,8162	1,0000
***n* = 100**		0,0100	0,1095	0,2090	0,3085	0,7065	0,8365	1,0000

Tab. 2-1: Beispielwerte für $x^{\max}$

---

[7] Beweis in Anlage A1.

[8] Da die Untersuchung keine aktuellen Anlageempfehlungen anstrebt, wurden bereits vorhandene historische Daten aus einem anderen Forschungsprojekt verwendet. Die Lösungen wurden mit dem Optimierungsprogramm CPLEX ermittelt, das quadratische Optimierungsverfahren bzw. das Barrier-Verfahren einsetzte.

Die Werte x^{max} für $n = 2$ der Tabelle 2-1 entsprechen den dargestellten Werten der Abbildung 2-1. Das Modell (vgl. (2-1) bis (2-4)) wurde in Abbildung 2-2 auf die Aktienrenditen des HDAX ($n = 100$) mit den Beschränkungsparametern $b = 0{,}01$; 0,02; 0,05 und 0,10 angewendet. Einige Portfolios deuten darin die Linien mit minimaler Volatilität an. In der Darstellung sind auch die unbeschränkten Portfolios enthalten; d.h. zum Beschränkungsparameter $b = 1$. Über dem minimalen Volatilitätspunkt (MVP) befinden sich jeweils die effizienten Portfolios.

Die Anlage A3 zeigt die Lösungsvektoren zum MVP für die Parameter $b = 0{,}05$ bzw. $b = 0{,}10$. Der maximal aufgetretene Wert ist jeweils $x_{22} = 0{,}112055$ bzw. $x_{22} = 0{,}224746$. Die Werte von x_{22} liegen deutlich unter den Grenzwerten x^{max} der Tabelle 2-1. Am Verlauf der Portfoliolinien in Abbildung 2-2 ist erkennbar, dass die Volatilität durch die Beschränkungsparameter begrenzt wird. Gleichzeitig erhöht sich die Volatilität im Vergleich zu den unbeschränkten Portfolios in inverser Abhängigkeit von b. Beim Parameterwert $b = 0{,}10$ erhöht ich die Volatilität erst bei den höheren Renditewerten von ca. 0,4 % Tagesrendite (vgl. horizontale Hilfslinie). Die Darstellung deutet auch einen Effekt auf die Rendite an: Je kleiner b gewählt wird, umso stärker reduziert sich nicht nur die Volatilität, sondern leider auch das erzielbare Renditespektrum. Neben dieser Volatilitätsbegrenzung ist das Risiko des Totalausfalls einer Aktie zu beachten, der bei den obigen Gewichtungswerte von x_{22} für $b = 0{,}10$ zu hoch ist. Deshalb ist es empfehlenswert, zusätzlich die Werte der Gewichte zu begrenzen durch z.B. $x_i \leq 0{,}10$ oder kleinere Parameter b zu wählen. Je kleiner b gewählt wird, umso mehr Aktien haben einen Wert $x_i > 0$. In der Abbildung 2-2 ist diese Anzahl n' zu jeder Ausprägung von b für das Portfolio mit der maximalen Rendite angegeben.

Die erzielbare Rendite wird durch die Beschränkungsungleichung teilweise reduziert. Um diesen Effekt zu erfassen wurde zur höchsten erzielbaren Rendite, unter Beachtung der Beschränkung durch Parameter $b = 0{,}10$ bestimmt, die bei gleicher Volatilität erzielbar wäre ohne diese Einschränkung. In Abbildung 2-2 zeigt die vertikale Hilfslinie, dass das Portfolio mit der maximalen erzielbaren Rendite mit bzw. ohne Beschränkung 0,4210 % bzw. 0,4571 % erreichte. Analog zeigt die horizontale Hilfslinie eine Volatilität von 1,36 bzw. 1,17. In Tabelle 2-1 sind die Renditeabweichungen an der

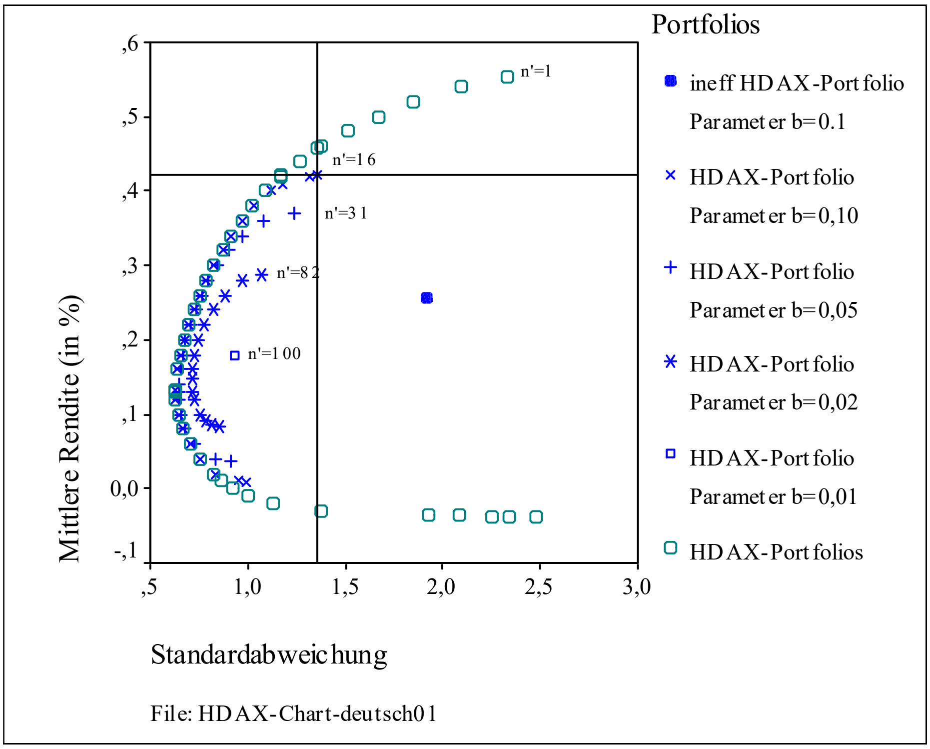

Abb. 2-2: Portfolios aus dem HDAX ohne und mit Beschränkungsungleichung ($b = 0{,}01$; 0,02; 0,05; 0,10)

maximal erzielbaren Rendite und am MVP zusammengefasst. Tabelle 2-2 enthält die jeweiligen Volatilitätsdifferenzen. Während am MVP sich das Mittel der Rendite sowie die Volatilität kaum unterscheiden, ist das Portfolio mit maximaler Rendite beim Parameter $b = 0{,}10$ deutlich schlechter (vgl. Tabellen 2-1 und 2-2). Die Volatilität erhöht sich um 16% und die Tagesrendite ist um 0,0361% geringer. Wird diese Differenz auf ein Jahr mit 200 Handelstagen bezogen, so fällt die Rendite um ca. 17% niedriger aus. Unterhalb der maximal erzielbaren Rendite besitzen die mit Parameter $b = 0{,}10$ beschränkten Portfolios jedoch eine vergleichbare Performance. In Abbildung 2-2 ist sichtbar, dass diese Differenzen hinsichtlich der Volatilität und der Rendite bei kleineren bzw. größeren Ausprägungen von b größer bzw. kleiner werden.

Index	Anzahl Aktien	MVP Rendite			Maximale Rendite		
		unbe-schränkt	Beschränk. B=0,10	Rendite-Differenz	unbe-schränkt	Beschränk. B=0,10	Rendite-Differenz
HDAX	100	0,132061	0,132062	**-0,0000**	0,4571	0,4210	**-0,0361**

Tab. 2-1: Renditeabweichungen beim MVP und dem Portfolio mit maximaler Rendite

Index	Anzahl Aktien	MVP Volatlität			Maximal-Rendite Volatilität		
		unbe-schränkt	Beschränk. B=0,10	**Volatilitäts-Differenz**	unbe-schränkt	Beschränk. B=0,10	**Volatilitäts-Differenz**
HDAX	100	0,63100	0,63044	**0,0006** (-0,0%)	1,172340	1,360821	**0,1885** (16%)

Tab. 2-2: Volatilitätsabweichungen beim MVP und dem Portfolio mit maximaler Rendite

Ohne quantitative Portfoliooptimierung kann trotz Einhaltung der Beschränkungsungleichung (2-4) auch Portfolios zusammengestellt werden, die eine wesentlich höhere Volatilität besitzen als die ermittelten effizienten. (vgl. ineffizientes Portfolio[9] mit einer Standardabweichung von 1,92 in Abbildung 2-2).

3. Die Risikomaße Standardabweichung und durchschnittliche (absolute) Abweichung

Die Verwendung der durchschnittlichen absoluten Abweichung als Risikomaß wurde von H. Konno und H. Yamazaki (1991)[10] vorgeschlagen. Sie weisen darauf hin, dass bei multivariat normalverteilten Renditen r_i der Aktien i ($i = 1, \ldots, n$) die Minimierung der absoluten Abweichung äquivalent ist zur Minimierung der Varianz bzw. Standardabweichung. Das Optimierungsmodell wird in Kapitel 4 beschrieben.[11]

Die Qualität dieser Äquivalenz oder Approximation der Lösung x^{SD} (bei Verwendung der Standardabweichung) durch die Lösung x^{AD} (bei Verwendung der absoluten Abweichung) hängt auch von der Anzahl der Beobachtungen n ab. Um diese Qualität quantitativ zu beurteilen kann die Norm der Differenz der Gewichtungsvektoren von x^{AD} und x^{SD} in den effizienten Portfolios herangezogen werden.

Für die empirische Untersuchung der Auswirkungen der 5-10-40-Regel (vgl. Einleitung) wurden – wie beim quadratischen Modell - 245 Tagesrenditen der 100 größten Aktiengesellschaften in Deutschland (HDAX) verwendet (vgl. Anhang A2). In Abbildung 3-1 sind zu beiden Risikomaßen einige Portfolios mit minimaler Volatilität im M-V-Raum dargestellt. Dabei steht das M für den Mittelwert der Rendite und V für die Volatilität. Zudem werden in diesem M-V-Raum die Aktien des HDAX gezeigt. Die Portfolios mit minimaler Volatilität (MPV) haben einen Rendite Mittelwert von

[9] Dieses ineffiziente Portfolio wurde mittels EXCEL-Solver ermittelt, das unter den Bedingungen (2-2) und (2-4) mit $b = 0{,}1$ die maximale Varianz besitzt. Die Portfolios mit minimaler Volatilität die sich unterhalb des MVP befinden sind ebenfalls ineffizient.

[10] Vgl. Konno, H., Yamazaki, H., (1991) bzw. Feinstein, C. D., Thapa, M. N., (1993).

[11] Die Performance der durchschnittlichen absoluten Abweichung als Risikomaß zeigt Schubert, L., (2005).

r^{AD} = 0,1343 bzw. r^{SD} = 0,1312. Für die beiden Portfolios mit z.B. einer mittleren Tagesrendite von 0,2 % ist die Norm des Differenzvektors $\|x^{AD}-x^{SD}\|$ = 0,11 (vgl. x^{AD} and x^{SD} in Tabelle A4 im Anhang). Die beiden Lösungsvektoren sind größtenteils aus den gleichen Aktien zusammengesetzt. Aufgrund der visuellen Ähnlichkeit des Verlaufs der punktuell angedeuteten Portfoliolinien (vgl. Abbildung 3-1) und der geringen Differenz der Lösungsvektoren kann davon ausgegangen werden, dass die folgenden Ergebnisse bzgl. der 5-10-40-Regel auch auf Portfolios mit dem Risikomaß Varianz übertragbar sind.

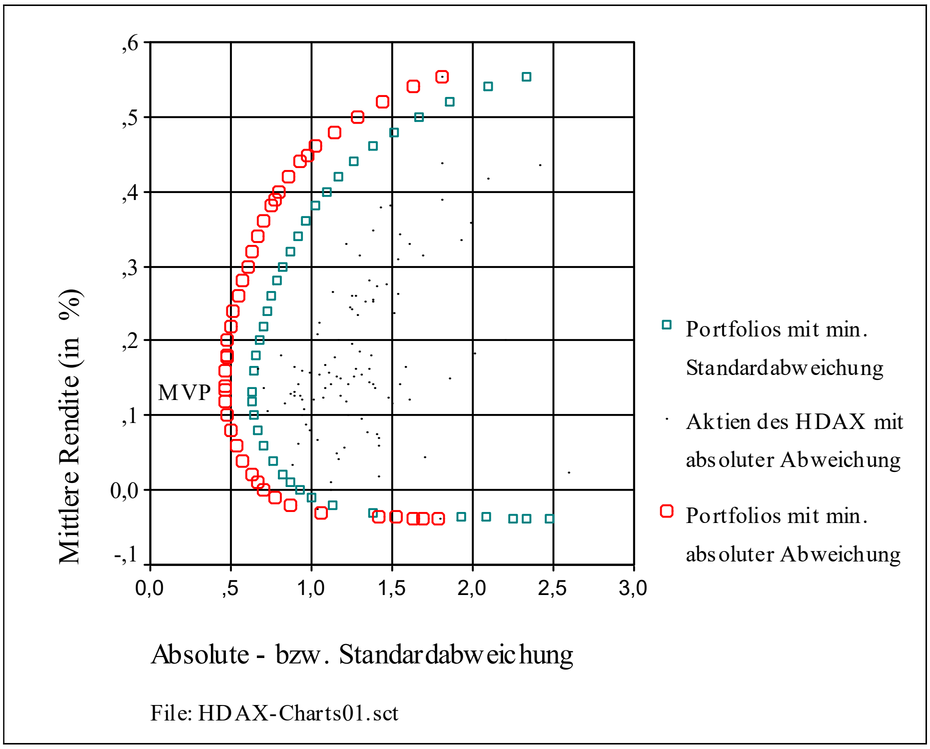

Abb. 3-1: Portfolios mit minimaler absoluter Abweichung bzw. Standardabweichung

4. Lineare Portfoliooptimierung unter Beachtung der 5-10-40-Regel

4.1. Modell zum linearen Ansatz

Basis des folgenden Optimierungsmodells ist das oben erwähnte Modell von H. Konno und H. Yamazaki. Um in der Portfoliooptimierung auf der Basis des Risikomaßes der absoluten Abweichung die 5-10-40-Regel zu berücksichtigen, werden die Aktiengewichtungen x_i $(i = 1, \ldots, n)$ aufgespalten in $x_i = x_i^o + y_i$. Dabei können die Variablen x_i^o und y_i Werte bis einschließlich 0,05 annehmen. Die Variable x_i^o repräsentiert den Bereich 0,00 bis 0,05 und y_i den Bereich über 0,05 bis einschließlich 0,10. Insgesamt kann die Variable x_i den Wert 0,10 nicht überschreiten[12].

Die Zielfunktion (4-1) minimiert die Summe der Schlupfvariablen v_t und c_t die die absoluten Abweichungen der Tagesrenditen der Aktien i $(i = 1, \ldots, n)$ am Tag t $(t = 1, \ldots, T)$ von der mittleren Rendite r_i der Aktie i repräsentieren. T stellt die Anzahl der Beobachtungen bzw. Tage dar:

[12] Das Optimierungsmodell wurde vor einigen Jahren im Rahmen eines Forschungsprojektes an der Universität Darmstadt mit den Kollegen Alexander Martin und Armin Fügenschuh entwickelt.

$$g(v,c) = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} v_t + c_t \rightarrow \min . \quad (4\text{-}1)$$

Diese absoluten Abweichungen v_t und c_t sind in der ersten Restriktion (4-2) als Schlupfvariablen im Einsatz. Die Variable r_i stellt die mittlere Rendite der Aktie $i = 1, ..., n$ dar und r_{it} die Rendite der Aktie i am Tag $t = 1, ..., T$. Die Gleichung (4-3) stellt die Budgetrestriktion dar mit der aufgeteilten Variable $x_i = x_i^o + y_i$ und die Ungleichung (4-4) gibt eine Mindestrendite r_P vor, die das Portfolio erzielen soll:

$$\sum_{i=1}^{n} (r_{it} - r_i) \cdot \left(x_i^{\circ} + y_i\right) + v_t - c_t = 0 \qquad \text{für } t = 1, ..., T, \quad (4\text{-}2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i^{\circ} + y_i) = 1 \text{ und} \quad (4\text{-}3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \cdot \left(x_i^{\circ} + y_i\right) \geq r_P . \quad (4\text{-}4)$$

Bei einem $r_P < r_{MVP}$ würde die Mindestrendite-Ungleichung (4-4) stets den MVP erwirken. Dabei ist r_{MVP} die Rendite des MVP (vgl. z.B. Abbildung 4-1). Deshalb wird in diesem Fall bei der Berechnung der Lösung statt „≥" das „=" im Term (4-4) verwendet.

Bis auf die Splittung der Variable x entsprechen die Restriktionen (4-1) bis (4-4) dem Ansatz von C. D. Feinstein und M. N. Thapa, die H. Konno und H. Yamazaki`s Modell umformulierten. Mit diesem Modell wurden die Portfolios mit minimaler absoluter Abweichung der Abbildung 3-1 berechnet.

Um die 5-10-40-Regel zu integrieren dienen die Nebenbedingungen (4-5a) bis (4-5c):

$$x_i^{\circ} - 0{,}5 \cdot \delta_i \geq 0 \qquad \text{für } i = 1, ..., n, \quad (4\text{-}5a)$$

$$y_i - M \cdot \delta_i \leq 0 \qquad \text{für } i = 1, ..., n, \quad (4\text{-}5b)$$

$$\sum_{i=1}^{n} 0{,}05 \cdot \delta_i + y_i \leq 0{,}40 . \quad (4\text{-}5c)$$

In diesen Ungleichungen ist die Dummyvariable δ_i enthalten. Diese Variable muss den Wert $\delta_i = 1$ in der Ungleichung (4-5b) annehmen, falls $y_i > 0$ ist. Das M steht für eine Zahl > 0,05. In diesem Falle wird mit der Ungleichung (4-5a) garantiert, dass $x_i°$ mindestens den Wert $x_i° = 0{,}05$ besitzt (bzw. mit der folgenden Ungleichung (4-6) genau den Wert $x_i° = 0{,}05$). Die Gleichung (4-5c) bewirkt, dass die Aktien, die die Gewichtung von $x_i = 0{,}05$ überschreiten, in der Summe höchstens 0,40 erreichen. Damit das Gewicht jeder Aktie höchstens $x_i = 0{,}10$ annehmen kann, sind die beiden Variablen $x_i°$ und y_i in den Ungleichungen (4-6) auf das Intervall 0 bis 0,05 beschränkt:

$$0 \leq x_i^{\circ} \leq 0{,}05 \text{ und } 0 \leq y_i \leq 0{,}05 . \quad (4\text{-}6)$$

Die Grenzen der übrigen Variablen sind in (4-7) festgelegt:

$$\delta_i \in \{0, 1\} \text{ für } i = 1, ..., n \text{ und } v_t \geq 0 \text{ sowie } c_t \geq 0 \text{ für } t = 1, ..., T. \quad (4\text{-}7)$$

4.2. Empirischer Test des linearen Ansatzes

Der Test dieses linearen gemischt ganzzahligen Modells wird wie beim quadratischen Modell anhand der bereits charakterisierten historischer Daten des HDAX vorgenommen.[13]

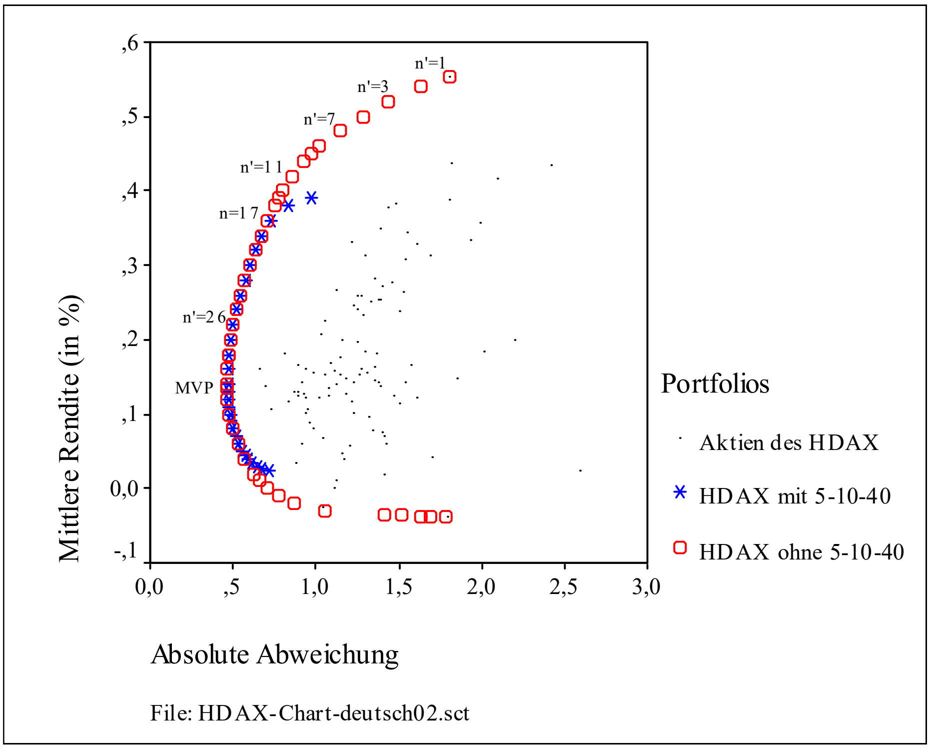

Abb. 4-1: Portfolios des HDAX mit und ohne die 5-10-40-Regel

Die Ermittlung effizienter Portfolios wird anfangs aus allen 100 Titeln des HDAX bestimmt und darauf werden kleinere Teilmengen von 75, 50, 25 und 16 betrachtet. Mit den Teilmengen wird der Einfluss der Anzahl *n* der zur Verfügung stehenden Aktientitel untersucht. Dazu werden zu jeder Teilmenge mit und ohne Beachtung der 5-10-40-Regel die Portfolios mit minimaler Volatilität ermittelt. Vom MVP ab aufwärts sind diese effizient. Die Zusammensetzung der Teilmengen ist unter der Tabelle A2 in der Anlage A2 beschrieben. Eine Variation der juristisch fixierten 5-10-40-Regel wurde nicht betrachtet.

Abbildung 4-1 zeigt die Portfolios mit minimaler Volatilität ohne bzw. mit Beachtung der 5-10-40-Regel. Es ist deutlich erkennbar, dass die Regel die Volatilität reduziert, sowohl im Vergleich zu den einzelnen Aktien des HDAX als auch zu der Menge der effizienten Portfolios mit hoher Volatilität. In Abbildung 4-1 ist für einige Portfolios die Anzahl n' der enthaltenen Titel mit $x_i > 0$ angegeben. Das Portfolio mit der höchsten bzw. niedrigsten Rendite besteht jeweils aus einer Aktie (n' = 1). Der MVP setzt sich dagegen i.d.R. aus vielen Aktien zusammen (hier n' = 22). Deshalb ist plausibel, dass sich im Umfeld des MVP die Portfolios durch Einbezug der 5-10-40-Regel kaum verändern. Jedoch bewirkt die Regel, dass die Rendite unter 0,4 % bleibt.

Wählt man 25 Aktien aus den 100 Aktien des HDAX aus, so reduziert sich sowohl das erzielbare Renditespektrum als auch die Möglichkeit durch Mischung die Volatilität zu minimieren (vgl. MVP im Kreuzungspunkt der gestrichelten Linien in Abbildung 4-2). Der Einbezug der 5-10-40-Regel zeigt im Umfeld des MVP Portfolios die eine leicht höhere Volatilität aufweisen im Verglich zu den

---

[13] Die Lösungen wurden mit dem Optimierungsprogramm CPLEX ermittelt, das den Simplex-Algorithmus bzw. das Branch&Bound-Verfahren einsetzte.

Portfolios ohne die Regel. Diese Tendenz ist bereits bei einer Teilmenge des HDAX von 75 oder 50 Aktien erkennbar (vgl. Abbildung A5a und A5b im Anhang). Dieser Nachteil, den die 5-10-40-Regel für Investoren bedeutet kann vermieden werden, indem die Anzahl *n* an Aktientiteln möglichst groß gewählt. Bereits bei *n* = 100 tritt dieser Nachteil kaum noch auf (vgl. Abbildung 4-1).

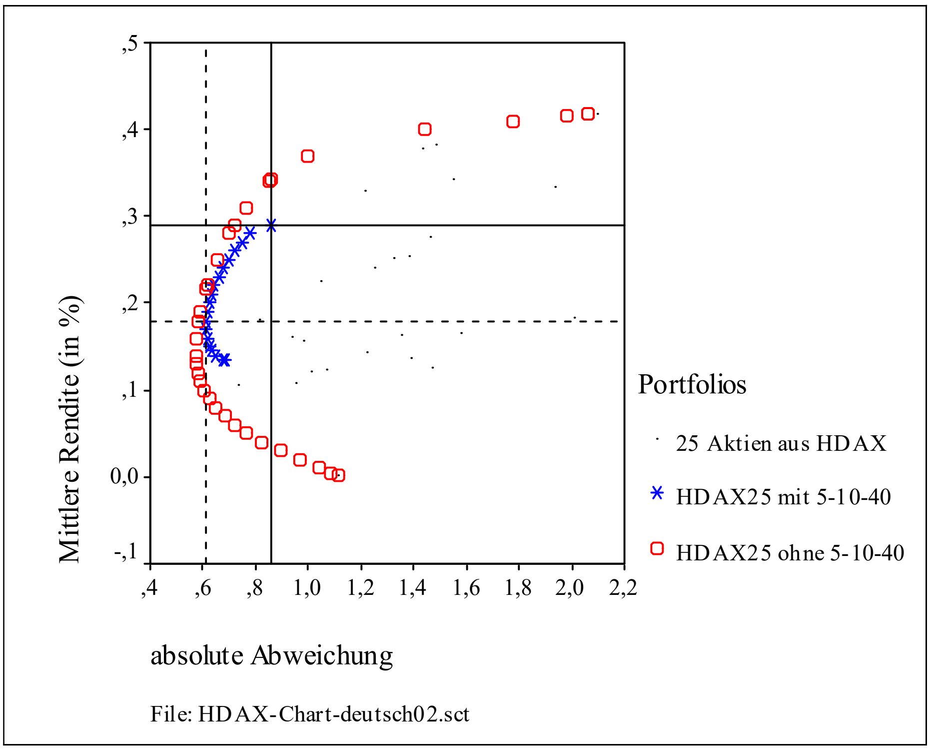

Abb. 4-2: Portfolios mit 25 Aktien aus dem HDAX mit und ohne die 5-10-40-Regel

Trotz hoher Anzahl *n* wird die erzielbare Rendite durch die Regel beschränkt. Um diesen Effekt zu erfassen wurde wie beim quadratischen Modell verfahren: Zur höchsten erzielbaren Rendite, unter Beachtung der 5-10-40-Regel, wird die Rendite bestimmt, die bei gleicher Volatilität erzielbar wäre ohne die 5-10-40-Regel. In Abbildung 4-2 sind mit bzw. ohne 5-10-40-Regel 0,2900% bzw. 0,3424% erzielbar (vgl. vertikale Hilfslinie). Analog zeigt die horizontale Hilfslinie eine Volatilität von 0,86 bzw. 0,72. In Tabelle 4-1 sind die Renditeabweichungen (zu unterschiedlicher Anzahl *n*) an der maximal erzielbaren Rendite und am MVP (vgl. gestrichelte Linie in Abbildung 4-2) zusammengefasst. Tabelle 4-2 enthält die jeweiligen Volatilitätsdifferenzen.

Die <u>Renditedifferenzen</u>, die die Tabelle 4-1 ausweist, gehen von 0,0348 % bis 0,0693 %. Selbst wenn der HDAX mit *n* = 100 betrachtet wird, so ergeben sich Differenzen in den Tagesrenditen die in einem ganzen Jahr mit 200 Handelstagen Renditedifferenzen von ca. 10% (am MVP) und ca. 27% (bei der maximal erzielbaren Rendite) bewirken. Auch wenn einbezogen wird, dass die Aktienkurse bzw. Renditedaten in den beiden Jahren vor der Finanzkrise erhoben wurden; d.h. aus einer Hausse-Phase des Aktenmarktes stammen, erscheinen die Resultate hoch. Bei gleicher Volatilität könnten deutlich höhere Renditen ohne die 5-10-40-Regel erzielt werden.

Die Tabelle 4-2 konzentriert sich auf die <u>Volatilität</u>. Beim kompletten HDAX konnten am MVP absolute Abweichungen ohne bzw. mit der 5-10-40-Regel von 0,4645 bzw. von 0,4714 gemessen werden. Eine Differenz von 0,0069 bzw. +1,5% ist in Abbildung 3-1 visuell nicht wahrnehmbar. Die übrigen Fälle zeigen eine deutliche Erhöhung der Volatilität, insbesondere, wenn das Portfolio mit maximaler Rendite betrachtet wird, das unter Beachtung der 5-10-40-Regel ermittelt wurde. Dieses besitzt eine durchschnittliche absolute Abweichung von 0,9706 während ohne die 5-10-40-Regel zur selben Rendite ein Portfolio mit einer absoluten Abweichung von 0,7747 bestimmbar wäre. Dies entspricht einer Erhöhung des Risikos von ca. 25%. Insgesamt scheint die Differenz der Volatilität am MVP (vgl. linke Seite der Tabelle) mit der Anzahl *n* der zur Auswahl stehenden Aktien abzunehmen. Bei den Portfolios mit „Maximal-Rendite“ (vgl. rechte Seite der Tabelle) ist diese Abnahme nicht erkennbar, sondern unabhängig von der Anzahl *n* relativ groß.

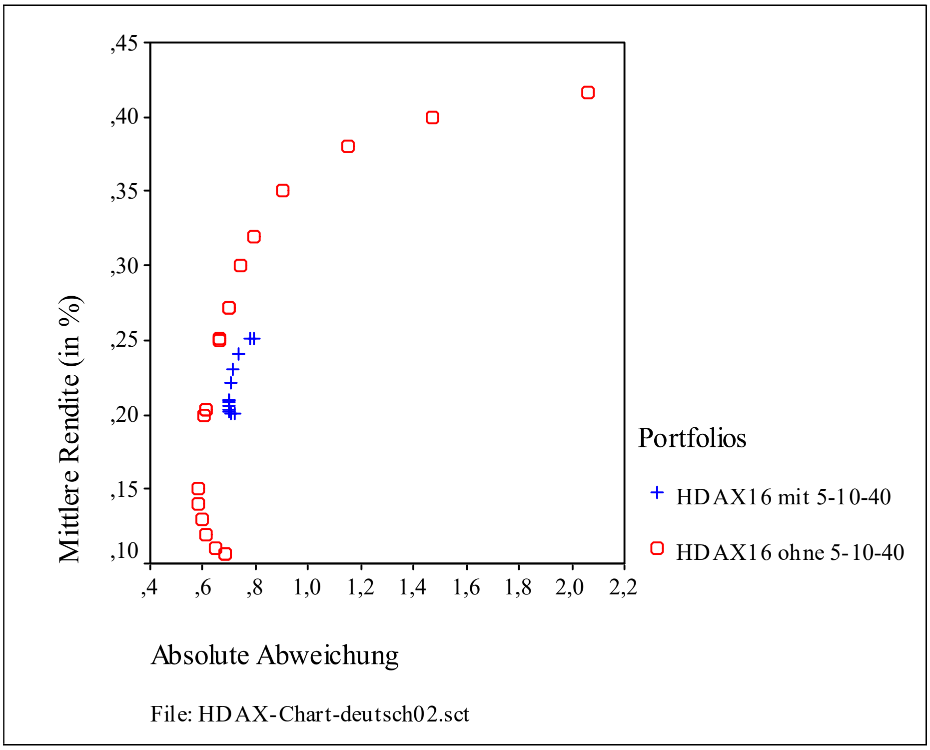

Abb. 4-3: Portfolios mit 16 Aktien aus dem HDAX mit und ohne 5-10-40 Regel

Die Mindestanzahl an Aktientitel, die die 5-10-40-Regel bedingt, ist $n = 16$. Dabei erhalten 4 Aktien exakt das Gewicht $x_i = 0{,}10$ und weitere 12 Aktien besitzen das Gewicht $x_i = 0{,}05$. Der M-V-Raum aller möglichen Aktienmischungen ist in diesem Fall nicht mehr stetig, sondern diskret. Die Möglichkeiten, 4 aus 16 Aktien für das Gewicht 0,10 auszuwählen ist beschränkt auf die Anzahl 1820. Von diesen deuten 11 „+“ in Abbildung 4-3 den unstetigen Verlauf der Portfolios mit minimaler absoluter Abweichung an. Das Spektrum erzielbarer Renditen ist hier stark eingeschränkt, im Vergleich zu den effizienten Portfolios ohne die 5-10-40-Regel.

Index	Anzahl Aktien	MVP Rendite			Maximale Rendite		
		unbe-schränkt	5-10-40-Regel	Rendite-Differenz	unbe-schränkt	5-10-40-Regel	Rendite-Differenz
HDAX	100	0,1789	0,1390	**-0,0398**	0,4489	0,3900	**-0,0589**
HDAX	75	0,1794	0,1401	**-0,0393**	0,4030	0,3640	**-0,0390**
HDAX	50	0,1804	0,1324	**-0,0480**	0,3540	0,3192	**-0,0348**
HDAX	25	0,2159	0,1799	**-0,0360**	0,3424	0,2900	**-0,0524**
HDAX	16	0,2721	0,2036	**-0,0685**	0,3200	0,2507	**-0,0693**

Tab. 4-1: Renditeabweichungen beim MVP und dem Portfolio mit maximaler Rendite

Index	Anzahl Aktien	MVP Volatlität			Maximal-Rendite Volatilität		
		unbe-schränkt	5-10-40-Regel	**Volatilitäts-Differenz**	unbe-schränkt	5-10-40-Regel	**Volatilitäts-Differenz**
HDAX	100	0,4645	0,4714	**0,0069** (1,5%)	0,7747	0,9706	**0,1959** (25%)
HDAX	75	0,4703	0,4821	**0,0118** (2,5%)	0,7684	0,9526	**0,1841** (24%)
HDAX	50	0,4793	0,5040	**0,0247** (5,2%)	0,7380	0,8644	**0,1264** (17%)
HDAX	25	0,5848	0,6138	**0,0289** (4,9%)	0,7183	0,8626	**0,1443** (20%)
HDAX	16	0,6087	0,6959	**0,0871** (14%)	0,6628	0,7959	**0,1331** (20%)

Tab. 4-2: Volatilitätsabweichungen beim MVP und dem Portfolio mit maximaler Rendite

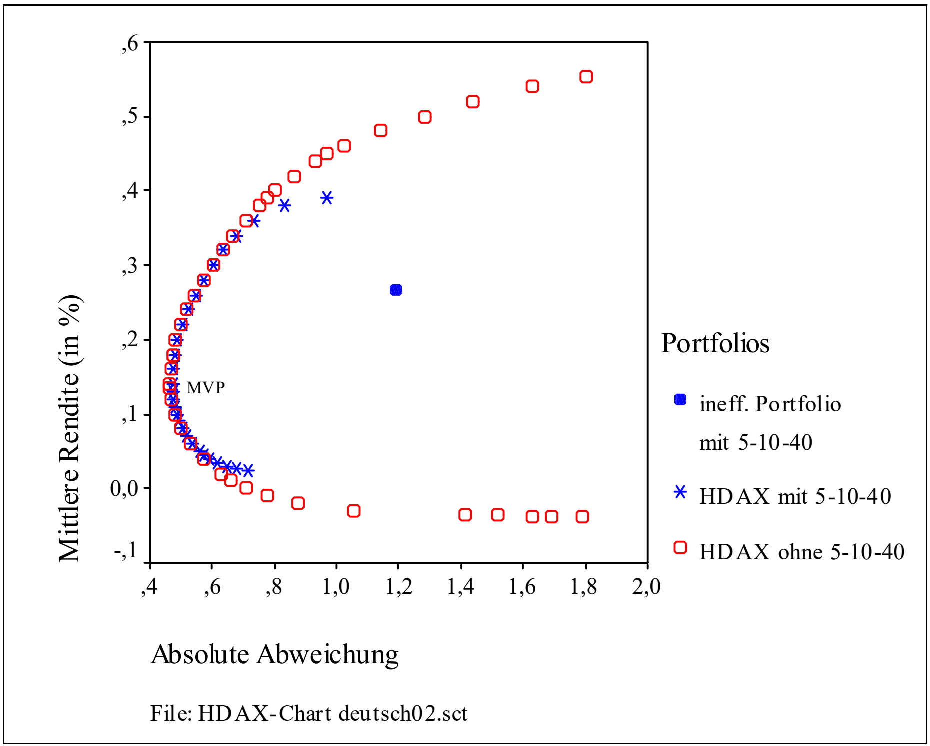

Abb. 4-4: Ineffizientes HDAX Portfolios das der 5-10-40 Regel entspricht

Während sich die quantitative Portfoliooptimierung auf historische Daten stützt, kann die mehr qualitative Vorgehensweise der Selektion von Aktien auch aktuelle Entwicklungen berücksichtigen. Obgleich der M-V-Raum für die qualitative Portfoliozusammenstellung nicht die Bedeutung besitzt wie bei der quantitativen, wird dieser Bezugsrahmen in Abbildung 4-4 eingesetzt um ein Portfolios aus dem kompletten HDAX darzustellen, das der 5-10-40-Regel zwar entspricht, jedoch eine erhöhte Volatilität besitzt[14]. Dieses Beispiel zeigt, dass trotz Einhaltung der 5-10-40-Regel bei der qualitativen Portfoliozusammenstellung auch höhere Volatilitäten entstehen können, als die bisher ermittelten effizienten Portfolios.

[14] Dieses ineffiziente HDAX-Portfolio wurde ermittelt, indem die vier Aktien mit den höchsten durchschnittlichen absoluten Abweichungen die Gewichte $x_i = 0{,}10$ erhielten. Analog wurden 12 weiteren Aktien die Gewichte $x_i = 0{,}05$ zugewiesen. Kovarianzen wurden dabei nicht berücksichtigt. Die Portfolios mit minimaler absoluter Abweichung unterhalb des MVP sind ebenfalls ineffizient.

5. Zusammenfassung

Die Auswertungen zeigen, dass die Volatilität der Portfolios durch die 5-10-40-Regel im linearen Modell sowie im quadratischen durch die Restriktion (2-4) bzw. durch den Beschränkungsparameter b deutlich beschränkt wird, sofern effiziente Portfolios ermittelt werden. Aber auch ohne optimierte Portfoliozusammenstellung ist eine moderate Reduktion der Streuung der Renditen erkennbar, wenn z.B. die 5-10-40 Regel beachtet wird, wie das ineffiziente Beispiel in Abbildung 4-4 zeigte. Um neben der Volatilität auch das Ausfallrisiko eines Titels stärker zu begrenzen ist es im quadratischen Modell empfehlenswert, entweder kleine Beschränkungsparameter b zu wählen oder für die einzelnen Variablen x_i ($i = 1, ..., n$) eine Obergrenze zu setzen.

Der Preis für diese Absicherung gegen höhere Verluste hängt von der Anzahl n der zur Verfügung stehenden Aktientitel bei der Selektion ab. Bei hoher Anzahl n befinden sich beim MVP bzw. oberhalb des MVPs mehr Möglichkeiten unter der 5-10-40-Regel Portfolios zu ermitteln mit nur geringen Volatilitätsunterschieden im Vergleich zur unbeschränkten Portfoliozusammenstellung. Trotzdem steigt auch bei großer Anzahl n diese Volatilitätsdifferenz an, falls höhere Renditen angestrebt werden. Für die maximal erzielbare Rendite unter der 5-10-40-Regel muss bei $n = 100$ ein ca. 25% höherem Risiko eingegangen werden. Auch aus der Perspektive der Renditedifferenz bei gleicher Volatilität sind deutliche Unterschiede sichtbar unabhängig von der Anzahl n. Je nach Konjunkturphase bewirkt die 5-10-40-Regel einen Nachteil von über 10% Jahresrendite im Vergleich zur Portfoliooptimierung ohne diese Regel.

Die erhöhte Volatilität bzw. die niedrigere Rendite kann als Versicherungsprämie gehen hohe Kursverluste gesehen werden. Jedoch übersieht dieser Vergleich, dass die 5-10-40-Regel auch gegen hohe Chancen „absichert“, die volatile Aktientitel ermöglichen.

Sowohl der quadratische wie der lineare Ansatz zur Risikoreduktion kann auf das „Tracken“ von Indizes übertragen werden. Für das Nachbilden von Indizes lässt die EU-Richtlinie 2009/65/EC in Artikel 52 ein erhöhtes Gewicht von $x_i = 0{,}20$ zu und in bestimmten Fällen für einen einzigen Titel sogar $x_i = 0{,}35$. Unter diesen Bedingungen würden die gemessenen Rendite- und Volatilitäts-differenzen geringer ausfallen.

Das quadratische Model kann relativ flexibel über einen Parameter das Risikospektrum steuern. Für die praktische Anwendung ohne Optimierung ist die Gestaltung von Portfolios etwas umständlicher, da nicht primär die Gewichte x_i einzelner Aktien direkt festgelegt werden können wie bei der 5-10-40-Regel, sondern zudem die Beschränkungsfunktion (2-4) beachtet werden muss.

6. Literatur

[1] Feinstein, C. D., Thapa, M. N., (1993), A Reformation of a Mean-Absolute Deviation Portfolio Optimization Model, Management Science, vol. 39, S. 1552-1553.

[2] Konno, H., Yamazaki, H., (1991), Mean – Absolute Deviation Portfolio Optimization Model and its Applications to Tokyo Stock Markets, Management Science, vol. 37, May, S. 519-531.

[3] Markowitz, H., (1952): Portfolio Selection, Journal of Finance, Vol. 7, S. 77-91.

[4] Opitz, Otto, (1989): Mathematik, Oldenbourg.

[5] Schubert, Leo, (2005): Performance of linear portfolio optimization, Universidad de Costa Rica – Centro de Investigación en Matemática Pura y Aplicada, CIMPA-01-2005, ISSN 1409-3820, Mayo 2005.

[6] Schubert, Leo, (2011): Hedge ratios for short and leveraged ETFs, Atlantic Review of Economics, Vol. 1, 2011, ISSN 2174-3835, S. 1-33.

[7] Sharpe, W. F., (1964), Capital Asset Prices: A Theory of markets equilibriums under conditions of risk, Journal of Finance, Nr. 19, S. 425-442.

Anhang:

A1: Beweis der Formel für x_i^{max}

A2: HDAX-Unternehmen und Teilmengen aus dem HDAX

A3: MVP der Aktien aus dem HDAX mit den Beschränkungsparametern b = 0,05 und b = 0,10

A4: Portfolios mit minimaler Volatilität für r = 0,2

A5: MVP der Aktien aus dem HDAX unter Beachtung der 5-10-40-Regel

A6: Portfolios aus 75 bzw. 50 ausgewählten Akten des HDAX

A7: Ineffiziente Portfolios zur quadratischen Beschränkung und zur 5-10-40-Regel

A1: Beweis der Formel für x_i^{max}

$$\boxed{x_i^{\max} = \frac{1+\sqrt{b\cdot\left(n^2-n\right)-\left(n-1\right)}}{n}}$$

In Abbildung 2-1 sind für n=2 die Schnittpunkte des Beschränkungskreises für $b > 1/n$ mit der Budgetrestriktion als x_1^{max} bzw. x_2^{max} dargestellt. Für n > 2 müssen die $n - 1$ restlichen Variablen gleich groß ausfallen, damit ein x_i den Maximalwert x_i^{max} annehmen kann. Zur Ermittlung dieses x_i^{max} muss einer der Schnittpunkte der Beschränkungsungleichung (2-4) mit der Gerade der Budgetrestriktion bestimmt werden. Dazu wird der Term (2-4) als Gleichung verwendet und die restlichen (n-1) Gewichte mit $x_i = (1 - x_i^{max}) / (n\text{-}1)$ angesetzt:

$$\left(n-1\right)\cdot\left(\frac{1-x_i^{\max}}{n-1}\right)^2+\left(x_i^{\max}\right)^2=b. \tag{A1-1}$$

Wird (n-1) im rechten Term von (A1-1) gekürzt und dann als Faktor auf beiden Seiten multipliziert, so ergibt sich

$$\left(1-x_i^{\max}\right)^2+\left(n-1\right)\cdot\left(x_i^{\max}\right)^2=\left(n-1\right)\cdot b \tag{A1-2}$$

und mit dem aufgelösten quadratischen Term wird (A1-2) zu

$$1-2\cdot x_i^{\max}+\left(x_i^{\max}\right)^2+\left(n-1\right)\cdot\left(x_i^{\max}\right)^2=\left(n-1\right)\cdot b \tag{A1-3}$$

und durch das Ausmultiplizieren der Produkte zu

$$1-2\cdot x_i^{\max}+\left(x_i^{\max}\right)^2+n\cdot\left(x_i^{\max}\right)^2-\left(x_i^{\max}\right)^2=n\cdot b-b\,. \tag{A1-4}$$

Gleichung (A1-4) kann nun in eine quadratische Gleichung umgestellt werden

$$1-n\cdot b+b-2\cdot x_i^{\max}+n\cdot\left(x_i^{\max}\right)^2=0$$

und mit der üblichen Formel[15] zur Lösung quadratischer Gleichungen das x_i^{max} bestimmt werden

$$x_i^{\max}=\frac{-\left(-2\right)+\sqrt{\left(-2\right)^2-4\cdot n\cdot\left(1-n\cdot b+b\right)}}{2n}\,. \tag{A1-5}$$

In der Wurzel des Terms (A1-5) kann die Zahl 4 als 2 extrahiert und dann im Bruch gekürzt werden zu

$$x_i^{\max}=\frac{1+\sqrt{1-n\cdot\left(1-n\cdot b+b\right)}}{n}$$

und daraus durch Auflösung der Klammer unter der Wurzel ergibt sich:

---

[15] Vgl. z.B. Opitz, O., (1989), S. 21.

$$\boxed{x_i^{\max} = \frac{1+\sqrt{b\cdot\left(n^2-n\right)-\left(n-1\right)}}{n}}\ \blacksquare$$

A2: HDAX-Unternehmen und Teilmengen aus dem HDAX

i	Unternehmen	*i*	Unternehmen	*i*	Unternehmen	*i*	Unternehmen
1	Adidas-Salomon AG	26	Deutsche Telekom AG	51	Leoni AG	76	Rational AG
2	Carl Zeiss Meditec	27	Eu. Aero Defense &Space	52	Deutsche Lufthansa AG	77	Rhoen-Klinikum AG
3	Aixtron AG	28	E.ON AG	53	Linde AG	78	Rheinmetall AG
4	Allianz AG	29	Fielmann AG	54	Lanxess AG	79	Rofin-Sinar Technologies Inc.
5	Arcandor AG	30	Fresenius Medical Care AG	55	MAN AG	80	RWE AG
6	BASF AG	31	Fuchs Petrolub AG	56	MediGene AG	81	SAP AG
7	Bayer AG	32	Fraport AG	57	Metro AG	82	Stada Arzneimittel AG
8	BB Biotech AG	33	FRESENIUS AG	58	MLP	83	K+S AG
9	Bechtle AG	34	GEA Group AG	59	Morphosys AG	84	SGL-Carbon AG
10	Beiersdorf AG	35	Bilfinger Berger AG	60	Merck KGAA	85	Siemens AG
11	Bayerische Motoren Werke AG	36	Gildemeister AG	61	MTU Aero Engines Holding AG	86	Singulus Technologies AG
12	Hugo Boss AG	37	Heidelb. Druck AG	62	Mue.Rueck.AG	87	Solon SE
13	Commerzbank AG	38	Heidelb. Cement AG	63	Norddt. Affinerie	88	Software AG
14	Conergy AG	39	Henkel KgaA	64	Nordex AG	89	Solarworld AG
15	Celesio AG	40	Han. Rueckvers. AG	65	Pfleiderer AG	90	Salzgitter AG
16	Continental AG	41	Hochtief AG	66	Pfeiffer Vacuum T.	91	Suedzucker AG
17	Demag Cranes AG	42	Hypo Real Estate AG	67	Praktiker AG	92	ThyssenKrupp AG
18	Daimler AG	43	IDS Scheer AG	68	Premiere AG	93	TUI AG
19	Deutsche Boerse AG	44	Infineon Tech. AG	69	Phoenix Solar AG	94	United Internet AG
20	Deutsche Bank AG	45	IVG Immobilien	70	ProSiebenSat1 Media AG	95	Vossloh AG
21	Dt. Euroshop AG	46	Jenoptik AG	71	Puma AG	96	Volkswagen AG
22	Douglas Holding AG	47	Kontron AG	72	Q-Cells AG	97	Wacker Chemie AG
23	Dt. Postbank AG	48	Klöckner&Co AG	73	QIAGEN N.V.	98	Wiredcard AG
24	Deutsche Post AG	49	Krones AG	74	QSC AG	99	Wincor Nixdorf AG
25	Drägerwerke AG	50	KUKA AG	75	Roth&Rau AG	100	ElringKlinger AG

Tabelle A2: Die Unternehmen des HDAX in dem Zeitintervall von 28. Juni 2006 bis zum 14. Juni 2007

<u>Teilmengen aus dem HDAX:</u>

HDAX75: Unternehmen $i = 1$ bis 37 und $i = 63$ bis 100.

HDAX50: Unternehmen $i = 1$ bis 25 und $i = 76$ bis 100.

HDAX25: Unternehmen $i = 1$ bis 37 und $i = 63$ bis 100.

HDAX16: Unternehmen $i = 1$ bis 8 und $i = 92$ bis 100.

A3: MVP der Aktien aus dem HDAX mit den Beschränkungsparametern b = 0,05 und b = 0,10

i	x_i
1	0,050992
2	0,021361
6	0,001718
8	0,077208
9	0,001727
15	0,005386
17	0,003628
21	0,025633
22	0,112055
23	0,001634
24	0,068904
25	0,061948
26	0,039515
29	0,016077
30	0,038365
31	0,000327
32	0,032036
38	0,008171
39	0,060391
40	0,000001
43	0,037566
44	0,017682
46	0,010483
53	0,022203
57	0,045256
60	0,028746
62	0,00711
68	0,010624
71	0,020364
75	0,021784
76	0,001812
80	0,033326
81	0,018577
82	0,040234
91	0,020334
100	0,036821

i	x_i
1	0,062052
2	0,019382
8	0,129666
22	0,224746
24	0,091918
25	0,065904
26	0,031403
29	0,011704
30	0,038076
32	0,017628
39	0,072436
43	0,035748
44	0,011142
57	0,035881
60	0,020299
68	0,004480
75	0,009873
80	0,033905
81	0,005067
82	0,043618
100	0,035070

Die nicht gelisteten Variablen haben den Wert von Null.

Tabelle A3: Lösung x^{MVP} des Modells mit Beschränkungsparameter b = 0,05 (linke Seite) und b = 0,10 (rechte Seite)

A4: Portfolios mit minimaler Volatilität für r = 0,2

i	x_i^{SD}
1	0,026652
2	0,002905
8	0,071924
9	0,012541
17	0,038946
22	0,213897
24	0,047219
25	0,055170
29	0,009455
30	0,005503
31	0,011579
39	0,048501
43	0,011936
44	0,008251
55	0,026530
57	0,083330
60	0,033305
63	0,000000
68	0,033003
75	0,063203
76	0,000000
80	0,033545
82	0,048300
95	0,027521
96	0,024007
100	0,062777

i	x_i^{AD}
1	0,000000
2	0,012206
8	0,024910
9	0,000000
17	0,048302
22	0,222963
24	0,014291
25	0,054571
29	0,004893
30	0,008177
31	0,000000
39	0,064224
43	0,000000
44	0,043231
55	0,027743
57	0,071064
60	0,010048
63	0,044822
68	0,022829
75	0,052906
76	0,025300
80	0,075694
82	0,054331
95	0,040203
96	0,000000
100	0,077293

Die nicht gelisteten Variablen haben den Wert von Null.

Tabelle A4: Lösung x^{SD} des Modells mit Standardabweichung (linke Seite) bzw. x^{AD} mit absoluter Abweichung (rechte Seite)

Die Lösungen mit minimaler Volatilität der beiden Portfoliomodelle haben bei der exemplarisch vorgegebenen Rendite von r = 0,2 annähernd die gleichen Aktien ausgewählt. Das Modell, auf der Basis der Standardabweichung hat einige zusätzlich Aktien ausgewählt im Vergleich zum Modell das die absolute Abweichung verwendet (vgl. Aktien mit dem Gewicht x_i = 0,000000).

A5: Portfolios aus 75 bzw. 50 ausgewählten Akten des HDAX

Die in den Abbildungen verwendeten Aktien sind in der Anlage A2 dokumentiert.

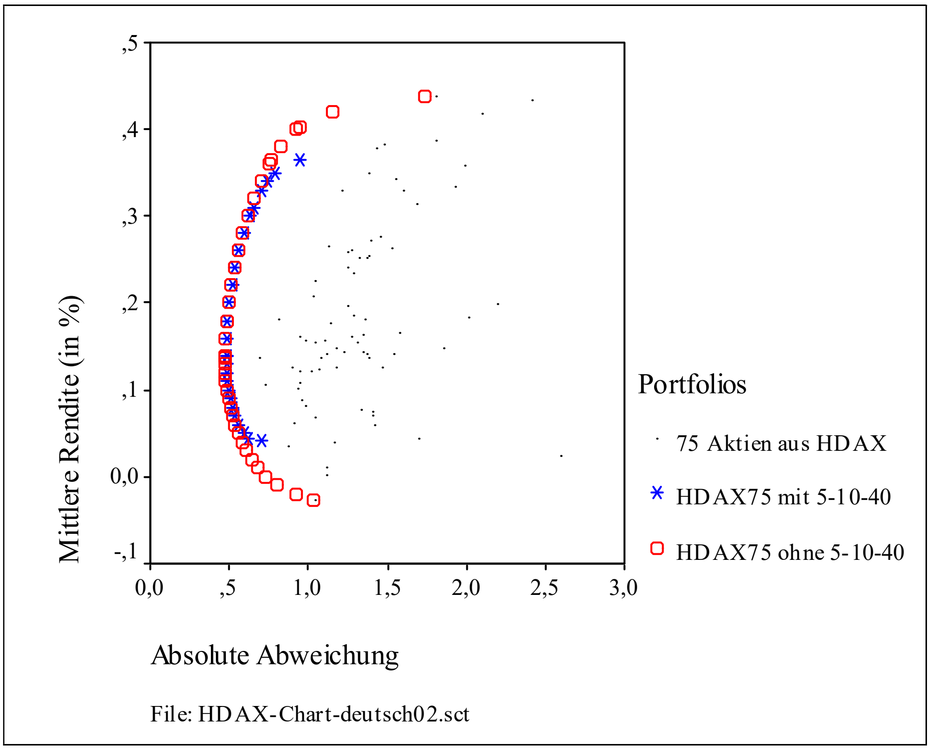

Abb. A5a: Portfolios mit 75 Aktien aus dem HDAX mit und ohne die 5-10-40-Regel

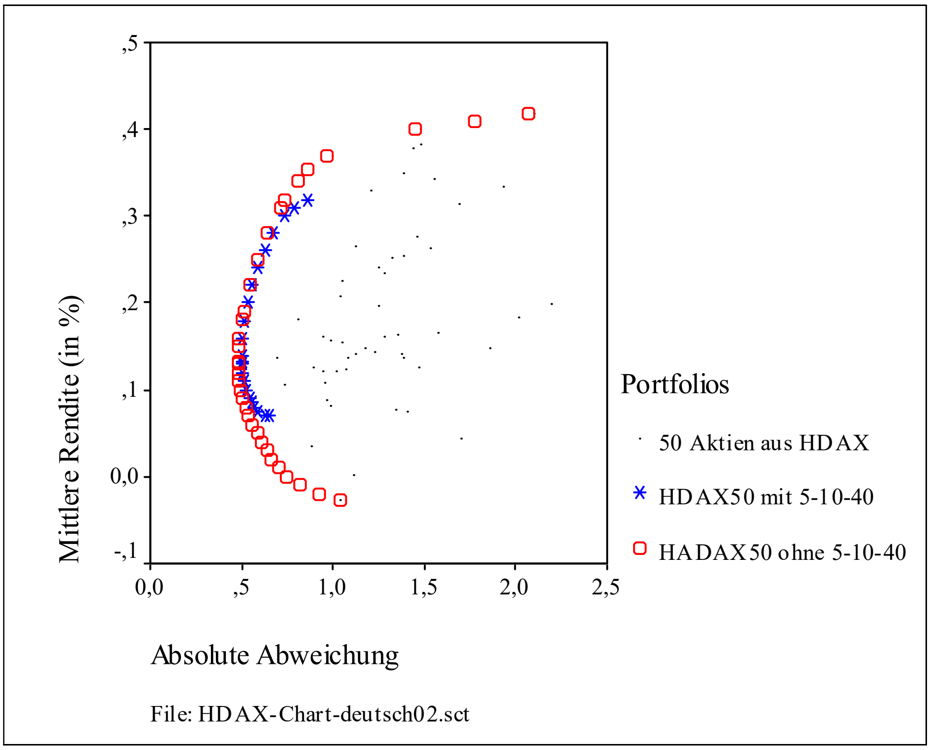

Abb. A5b: Portfolios mit 50 Aktien aus dem HDAX mit und ohne die 5-10-40-Regel

A6: MVP der Aktien aus dem HDAX unter Beachtung der 5-10-40-Regel

i	$x_i°, y_i$	*i*	x_i	$x_i \leq 0{,}05$	$0{,}05 < x_i \leq 0{,}1$
1	0,017563	*1*	0,017563	0,017563	
2	0,026557	*2*	0,026557	0,026557	
8 (x°)	**0,050000**	*8*	0,099107		0,099107
8 (y)	**0,049107**				
17	0,007175	*17*	0,007175	0,007175	
21 (x°)	**0,050000**	*21*	0,061653		0,061653
21 (y)	**0,011653**				
22 (x°)	**0,050000**	*22*	0,100000		0,100000
22 (y)	**0,050000**				
24 (x°)	**0,050000**	*24*	0,077247		0,077247
24 (y)	**0,027247**				
25 (x°)	**0,050000**	*25*	0,061993		0,061993
25 (y)	**0,011993**				
26	0,005120	*26*	0,005120	0,005120	
29	0,008286	*29*	0,008286	0,008286	
30	0,047342	*30*	0,047342	0,047342	
31	0,035129	*31*	0,035129	0,035129	
32	0,023119	*32*	0,023119	0,023119	
39	0,050000	*39*	0,050000	0,050000	
43	0,012471	*43*	0,012471	0,012471	
44	0,044760	*44*	0,044760	0,044760	
46	0,000384	*46*	0,000384	0,000384	
53	0,017363	*53*	0,017363	0,017363	
57	0,050000	*57*	0,050000	0,050000	
59	0,002789	*59*	0,002789	0,002789	
60	0,025531	*60*	0,025531	0,025531	
62	0,001574	*62*	0,001574	0,001574	
68	0,014525	*68*	0,014525	0,014525	
69	0,004951	*69*	0,004951	0,004951	
75	0,012487	*75*	0,012487	0,012487	
76	0,026178	*76*	0,026178	0,026178	
80	0,050000	*80*	0,050000	0,050000	
82	0,050000	*82*	0,050000	0,050000	
91	0,016696	*91*	0,016696	0,016696	
100	0,050000	*100*	0,050000	0,050000	
Summe:	**1,000000**	**Summe:**	**1,000000**	**0,600000**	**0,400000**

Tabelle A6: Lösung des MVP des kompletten HDAX mit den Variablen x° bzw. y des Modells (linke Seite), mit Variable x (Mitte) und der Aufteilung der Variablen entsprechend der Schwellen der 5-10-40-Regel.

Die Tabelle A6 zeigt die Modelllösung des HDAX mit minimaler absoluter Abweichung (vgl. MVP in Abbildungen 3-1 bzw. 4-1) mit den Variablen aus den Gleichungen bzw. Ungleichungen (4-1) bis (4-5c) des Modells. Der MVP hat eine mittlere Tagesrendite von $r_{MVP} = 0{,}139049$ und eine absolute Abweichung von $g(v,c) = 0{,}464428$ (vgl. Zielfunktion (4-1)). In den mittleren Spalten wurde $x_i = x_i^o + y_i$ bestimmt und auf der rechten Seite die Variablen nach Gewichtung in $0 < x_i \leq 0{,}05$ und $0{,}05 < x_i \leq 0{,}10$ aufgeteilt und zudem wurden die Gewichtungen aufsummiert. Die Variablen x_{39} (Henkel KgaA), x_{57} (Metro AG), x_{80} (RWE AG), x_{82} (Stada Arzneimittel AG) und x_{100} (ElringKlinger

AG) haben die Grenze 0,05 ausgeschöpft. Die Schwelle von 0,10 wurde nur von x_{22} (Douglas Holding AG) erreicht. Diese Aktie erreicht mit den übrigen vier Aktien in dieser Gewichtungs-Größenklasse genau das maximale Gewicht von 0,40000 (vgl. Ungleichungen (4-5a) bis (4-5c)).

A7: Ineffiziente Portfolios zur quadratischen Beschränkung und zur 5-10-40-Regel

i	x_i	x_i^2
3	0,05632644	0,00317267
14	0,13088099	0,01712983
34	0,01062807	0,00011296
35	0,00625825	0,00003917
36	0,02215485	0,00049084
41	0,00914739	0,00008367
47	0,00287154	0,00000825
48	0,01329465	0,00017675
64	0,13900616	0,01932271
65	0,00827757	0,00006852
69	0,13279989	0,01763581
72	0,12901654	0,01664527
83	0,01134252	0,00012865
84	0,05966669	0,00356011
86	0,00466815	0,00002179
87	0,08222471	0,00676090
89	0,11386188	0,01296453
90	0,02938688	0,00086359
94	0,02562908	0,00065685
97	0,01255778	0,00015770
Σ	**1,00000003**	**0,10000057**

i	x_i
3	0,10
14	0,10
36	0,05
48	0,05
56	0,05
59	0,05
64	0,10
68	0,05
69	0,10
72	0,05
75	0,05
84	0,05
86	0,05
87	0,05
89	0,05
98	0,05
Σ	**1,00**

Tabelle A7: Lösung x eines ineffizienten Portfolios zur quadratischen Beschränkung (linke Seite) und zur 5-10-40-Regel (rechte Seite).

Trotz Einhaltung der quadratischen Ungleichung (2-4) sind Lösungen x wie in Abbildung 2-2 dargestellt möglich. Das abgebildete Beispiel mit dem in Tabelle 7 dargestellten Lösungsvektor (linke Seite) hat eine Standardabweichung von $g(x)$ = 1,9172 und eine mittlere Tagesrendite von r = 0,2575.

Die ineffiziente Lösung der Abbildung 4-4 besitzt eine mittlere Tagesrendite von r = 0,266373 und eine absolute Abweichung von $g(v,c)$ = 1,192491. Die Aktien i = 3 (Aixtron AG), 14 (Conergy AG), 64 (Nordex AG) und 69 (Phoenix Solar AG) hatten die höchsten durchschnittlichen Abweichungen aller HDAX Aktien und erhielten deshalb das maximal mögliche Gewicht von x_i = 0,10.